

## Глава III

### ГЕОМЕТРИЯ МАСС ТЕЛА ЧЕЛОВЕКА

Для описания механического движения в пространстве и во времени используют кинематические характеристики. Однако кинематические характеристики, определяя геометрию движения, не учитывают движущиеся массы и действующие силы и поэтому не в состоянии дать ответ на вопрос о причинах возникновения и изменения движения. Динамика с использованием динамических характеристик раскрывает причины возникновения и изменения движения [41, с. 48].

Следует отметить, что расчет динамических параметров спортивных упражнений невозможен без знания о масс-инерционных характеристиках (далее – МИХ) сегментов тела человека. Уравнения динамики включают в себя параметры, характеризующие геометрию масс тела человека. *Под геометрией масс тела человека понимается массив показателей, характеризующих распределение массы как всего тела, так и его отдельных сегментов.* К таким показателям, прежде всего, относятся:

- *массы сегментов;*
- *положение центра масс сегментов;*
- *центральные моменты инерции сегментов<sup>1</sup>;*
- *длины сегментов.*

*Масса сегмента – мера его инертности в поступательном движении.* Чем больше масса сегмента, тем большая сила требуется для изменения его механического состояния. Масса  $m$  равна отношению приложенной силы  $F$  к вызываемому силой ускорению  $a$ :

$$\vec{m} = \frac{\vec{F}}{a}. \quad (3.1)$$

Выражение по определению массы по формуле (3.1) основано на втором законе Ньютона, согласно которому *изменение движения пропорционально изменению действующей силы и происходит по тому направлению, по которому эта сила приложена.*

---

<sup>1</sup> Рассмотрим подробнее понятие «момент инерции сегментов» в 3.4 и «момент инерции биомеханической системы» в 3.5.

Следует отметить, что при выполнении спортивных упражнений вес спортсмена  $P$  не изменяется. Тогда формула по определению массы спортсмена  $m$  примет вид:

$$m = \frac{P}{g}, \quad (3.2)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения тела, которое равно  $9,806 \text{ м/с}^2$ . Единица измерения массы – 1 кг.

*Положение центра масс сегментов – точка, относительно которой сумма моментов сил тяжести, действующей на этот сегмент, равна нулю.*

Вообще говоря, выше приведено определение положения центра тяжести тела, а не его центра масс. Однако в условиях однородности поля силы тяжести, точки общего центра масс и общего центра тяжести совпадают.

*Длины сегментов – расстояние между центрами суставов, ограничивающих этот сегмент.*

Зная МИХ сегментов тела, существует возможность определить положение общего центра масс (далее – ОЦМ) тела спортсмена расчетным методом. Положение ОЦМ тела – одна из важнейших биомеханических характеристик. Так, к примеру, в тяжелой атлетике при исследовании техники рывка и толчка определение траектории движения ОЦМ тела спортсмена имеет большое значение при исследовании вопросов сохранения устойчивого равновесия и оптимизации движений.

### **3.1 Методы определения геометрии масс тела человека**

Расчет масс-инерционных параметров человеческого тела начинают с расчета массы и положения центра масс сегментов тела. На протяжении всего периода развития биомеханики применялись различные методы определения вышеуказанных характеристик. Первые экспериментальные данные по определению МИХ были получены при исследовании трупов зарубежными исследователями (Harless, 1860; Braune, Fisher, 1889; Dempster, 1955; Mori, Jamamoto, 1959; Hanavan, 1966; Clauser, 1969; Morrison, 1975 и др.) [73; 76; 101]. В данных исследованиях использовали

части тела замороженных трупов, преимущественно пожилых мужчин, с помощью рентгена определяли оси вращения звеньев, после чего их рас-секали и взвешивали. Затем экспериментально определялись координаты центра масс сегментов и ОЦМ биомеханической системы.

Ниже приведен пример измерений и расчетных характеристик, полученных данным методом различными авторами (таблицы 3.1, 3.2).

**Таблица 3.1 – Относительные значения масс и положений центров масс отдельных сегментов тела человека (по Clauser, 1969)**

Сегмент	Масса сегмента относи-тельно массы тела, %	Положение центров масс звена относительно длины сегмента, %
Голова	7,3	46,6
Туловище	50,7	38,0
Вся рука	4,9	41,3
Плечо	2,6	51,3
Предплечье и кисть	2,3	62,6
Предплечье	1,6	39,0
Кисть	0,7	18,0
Вся нога	16,1	38,2
Бедро	10,3	37,2
Голень и стопа	5,8	47,5
Голень	4,3	37,1
Стопа	1,5	44,9

**Таблица 3.2 – Относительная масса отдельных звеньев тела (по Фишеру, 1887 и Бернштейну, 1926)**

Звенья тела	по Фишеру	по Бернштейну	
		Мужчины	Женщины
Голова	0,0706	0,0672	0,0812
Туловище	0,4270	0,4630	0,4390
Бедро	0,1158	0,1221	0,1289
Голень	0,0527	0,0465	0,0434
Стопа	0,0179	0,0146	0,0129
Плечо	0,0336	0,0265	0,0260
Предплечье	0,0228	0,0182	0,0182
Кисть	0,0084	0,0070	0,0055

Результаты расчета масс-инерционных характеристик по среднеста-тистическим коэффициентам используются в исследованиях динамики

двигательных действий человека, однако эти значения являются неточными, потому что, во-первых, данные были получены на трупах пожилых мужчин, во-вторых, между трупной и живой тканями существует определенная разница, в-третьих, масса сегментов может меняться под влиянием тренировки.

Возросшая потребность в повышенной точности измерения геометрии масс тела человека подтолкнула исследователей к разработке более корректных методов их определения. Творческим коллективом в лаборатории Государственного центра ордена Ленина Института физической культуры кафедры биомеханики была разработана прижизненная методика определения геометрии масс сегментов тела живого человека с использованием радиоизотопного метода, основанного на физической закономерности прохождения моноэнергетического узкого пучка через материал [46].

В результате проведенного исследования [46] авторами предложено использовать при определении масс-инерционных характеристик сегментов тела испытуемых уравнения множественной регрессии, учитывающие антропометрические особенности испытуемых (длина тела и масса).

В частности, если в качестве учитываемых параметров тела выступают масса и рост испытуемого, то определяемая масс-инерционная характеристика сегмента (масса, положение центра тяжести (далее – ЦТ), центральный момент инерции) вычисляется по формуле

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2, \quad (3.3)$$

где  $Y$  – масса сегмента или положение ЦТ;  $X_1$  – общая масса тела в килограммах;  $X_2$  – длина тела (рост) в сантиметрах;  $B_i$  – коэффициенты уравнений множественной регрессии.

**Таблица 3.3 – Коэффициенты уравнений множественной регрессии для вычисления масс-инерционных характеристик сегментов тела человека по весу ( $X_1$ ) и длине ( $X_2$ )**

Сегмент	$B_0$	$B_1$	$B_2$
<b>Масса сегмента, кг</b>			
Кисть	-0,1165	0,0036	0,00175
Предплечье	0,3185	0,01445	-0,00114
Плечо	0,250	0,03012	-0,0027

Сегмент	$B_0$	$B_1$	$B_2$
<b>Масса сегмента, кг</b>			
Голова	1,296	0,0171	0,0143
Бедро	-2,649	0,1463	0,0137
Голень	-1,592	0,0362	0,0121
Стопа	-0,829	0,0077	0,0073
<b>Положение центра масс на продольной оси сегмента, см</b>			
Кисть	4,11	0,026	0,033
Предплечье	0,192	-0,028	0,093
Плечо	1,67	0,03	0,054
Голова	8,357	-0,0025	0,023
Бедро	-2,42	0,038	0,135
Голень	-6,05	-0,039	0,142
Стопа	3,767	0,065	0,033

Чем больше индивидуальных антропометрических характеристик используется в уравнении регрессии, тем с меньшей погрешностью будут определены МИХ. Так, для определения длин сегментов тела, в том числе и различных отделов туловища, предложено использовать следующие уравнения:

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3, \quad (3.4)$$

где  $Y$  – длина сегмента;  $X_1$  – длина ноги;  $X_2$  – длина тела (рост);  $X_3$  – длина руки;  $B_i$  – коэффициенты уравнений множественной регрессии.

Значения используемых здесь коэффициентов приведены в таблице 3.4.

**Таблица 3.4 – Длина сегментов тела  
(по данным В. М. Зациорского и др., 1981)**

№	Сегмент	Длина сегментов тела, см			
		$B_0$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
1	Стопа	0,516	0,0086	0,109	0,069
2	Голень	1,05	0,282	0,049	0,033
3	Бедро	5,34	0,330	0,093	-0,012
4	Кисть	1,28	-0,072	0,02	0,256
5	Предплечье	7,19	0,134	0,0016	0,062
6	Плечо	1,79	0,309	-0,12	0,185
7	Голова	15,90	-0,046	0,094	-0,047
8	Верхняя часть туловища	3,78	-0,133	0,11	0,17
9	Средняя часть туловища	3,16	-0,219	0,241	-0,042
10	Нижняя часть туловища	-12,9	-0,16	0,19	0,26

Если при вычислении МИХ сегментов конечностей их границы довольно просто определяются суставами, то при определении МИХ различных частей туловища проблематично установить границы этих частей. Для корректного определения длин частей туловища обычно пользуются рекомендациями, представленными в таблице 3.5

Таблица 3.5 – Антропометрические точки, указывающие границы сегментов

1. Верхний отдел туловища	
Проксимальная точка –	остистый отросток седьмого шейного позвонка
Дистальная точка –	нижне-грудной отдел позвоночника
2. Средний отдел туловища	
Проксимальная точка –	нижне-грудной отдел позвоночника
Дистальная точка –	пупочная область
3. Нижний отдел туловища	
Проксимальная точка –	пупочная область
Дистальная точка –	передняя подвздошная ость

Использование уравнений множественной регрессии является более предпочтительным, чем использование среднестатистических коэффициентов, так как в этом случае используется больше индивидуальных антропометрических данных человека, что обеспечивает большую точность расчетов.

### 3.2 Определение МИХ для *N*-звенной модели опорно-двигательного аппарата тела человека

При моделировании техники различных спортивных упражнений используются модели с различной сегментацией, т. е. с различным числом звеньев. Наиболее простая модель для исследования техники тяжелоатлетических упражнений – модель, состоящая из шести звеньев<sup>2</sup>. В данной модели сегменты головы и туловища объединены в одно звено. Встает вопрос об определении МИХ этого звена. Кроме того, при анализе некоторых особо простых движений верхние и нижние конечности спортсмена

<sup>2</sup> См. гл. 1.

тоже могут рассматриваться, как одно звено. Рассмотрим метод расчета данных характеристик и введем следующие обозначения:

- - сустав;
- - ЦМ сегмента.

Если рассматривать руку человека как одно звено, то для определения МИХ можно использовать следующую схему рисунка.

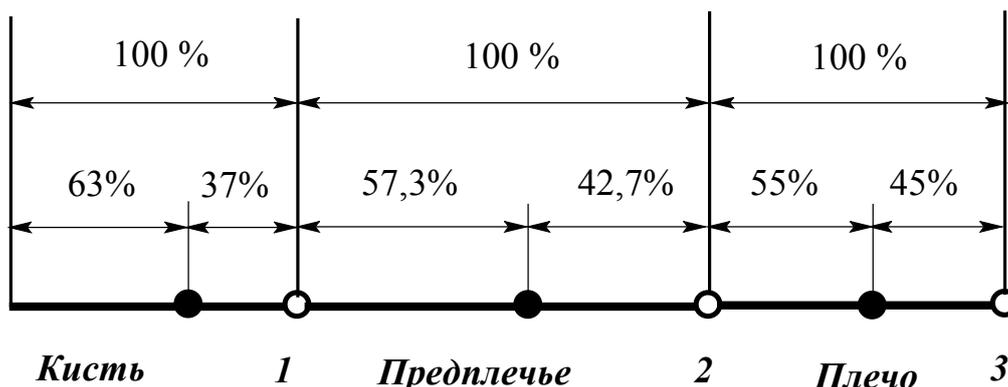


Рисунок 3.1 – Антропометрические точки сегментов руки

1 – лучезапястный сустав; антропометрическая точка для кисти – шиловидная. 2 – локтевой сустав; антропометрическая точка для предплечья – плечелучевая. 3 – плечевой сустав; антропометрическая точка для плеча – акромиальная.

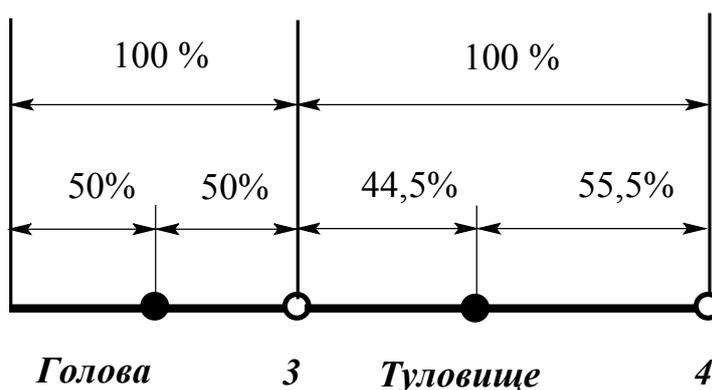


Рисунок 3.2 – Антропометрические точки сегментов туловища с головой

3 – плечевой сустав; антропометрическая точка для головы – остистый отросток 7-го шейного позвонка. 4 – тазобедренный сустав.

Если рассматривать ногу спортсмена как одно звено, то координаты масс сегментов можно определить согласно следующей схеме рисунка.

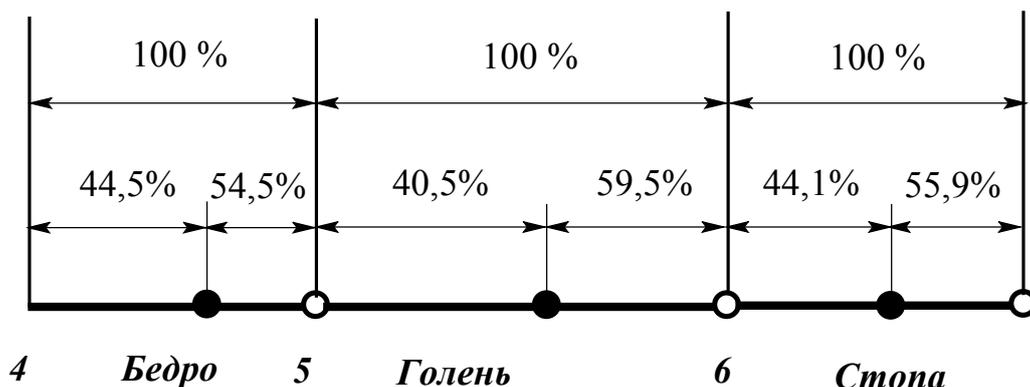


Рисунок 3.3 – Антропометрические точки сегментов ноги

4 – тазобедренный сустав; антропометрическая точка для бедра – переднеподвздошная. 5 – коленный сустав: антропометрическая точка для голени – верхнеберцовая. 6 – голеностопный сустав: антропометрическая точка для стопы – пяточная.

### 3.3 Экспериментально-аналитический метод определения общего центра тяжести тела человека

Итак, зная МИХ сегментов тела человека, возможно определение координат общего центра тяжести (далее – ОЦТ) тела по следующим формулам:

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^N X_{c_i} P_i}{\sum_{i=1}^N P_i} ; \quad Y_c = \frac{\sum_{i=1}^N Y_{c_i} P_i}{\sum_{i=1}^N P_i} , \quad (3.5)$$

где  $X_c$  – координата ОЦМ системы тел по оси  $O_x$ ;

$Y_c$  – координата ОЦМ системы тел по оси  $O_y$ ;

$X_{c_i}$  – координата центра масс  $i$ -го тела по оси  $O_x$ ;

$Y_{c_i}$  – координата центра масс  $i$ -го тела по оси  $O_y$ ;

$P_i$  – масса  $i$ -го звена;

$N$  – количество звеньев модели.

Подставляя формульные зависимости (2.17) в уравнение (3.5) получим:

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i S_i \cos Q_i + \sum_{k=2}^n m_k \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos Q_j}{\sum_{i=1}^n m_i};$$

$$Y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i S_i \sin Q_i + \sum_{k=2}^n m_k \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin Q_j}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$
(3.6)

Приняв обозначение

$$A_i = \frac{m_i S_i + L_i \sum_{j=i+1}^N m_j}{\sum_{i=1}^N m_i};$$
(3.7)

формулы координат ОЦТ человека примут вид:

$$X_c = \sum_{i=1}^N A_i \cos Q_i, \quad Y_c = \sum_{i=1}^N A_i \sin Q_i.$$
(3.8)

Коэффициенты  $A_i$  определяются только значениями МИХ сегментов тела человека, т. е. являются постоянными. Учитывая наличие погрешности МИХ сегментов, а в случае суммирования в формуле (3.7) погрешности возрастают, встает вопрос о возможности увеличения точности определения данных коэффициентов.

Экспериментально-аналитический метод определения коэффициентов  $A_i$  обладает достаточной точностью и в принципе не требует специального оборудования. Метод для трехзвенной модели был разработан Ю.А. Ипполитовым [50]. Расширим идеи автора, указав экспериментальный способ расчета для семизвенной модели.

На две трехгранные призмы, одна из которых расположена на медицинских весах, а вторая – на полу, укладывается доска в горизонтальном положении (рисунок 3.4). Измеряется давление доски на весы ( $R_o$ ).



**Рисунок 3.4 – Расположение доски на медицинских весах и на полу**

Затем испытуемый принимает на доске положение лежа, руки вверх (руки на одной прямой линии с туловищем), таким образом, чтобы фаланги пальцев кистей рук проецировались на вершину трехгранной призмы, расположенной на полу (рисунок 3.5).

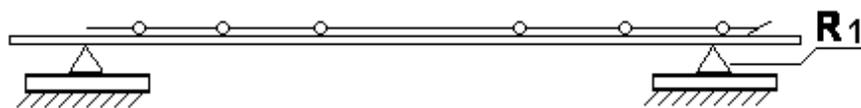


Рисунок 3.5 – Первое измерение силы реакции опоры  $R_1$

Введем обозначения:

$\varphi_1$  – угол, образованный линией, соединяющей фаланги пальцев кистей и лучезапястных суставов по продольной оси кистей, и доской;

$\varphi_2$  – угол, образованный линией, соединяющей лучезапястные и локтевые суставы по продольной оси предплечий, и доской;

$\varphi_3$  – угол, образованный линией, соединяющей локтевые и плечевые суставы по продольной оси плеч, и доской;

$\varphi_4$  – угол, образованный линией, соединяющей плечевые и тазобедренные суставы по продольной оси туловища, и доской;

$\varphi_5$  – угол, образованный линией, соединяющей тазобедренные и коленные суставы по продольной оси бедер, и доской;

$\varphi_6$  – угол, образованный линией, соединяющей коленные и голеностопные суставы по продольной оси голеней, и доской;

$\varphi_7$  – угол, образованный линией, соединяющей голеностопные суставы и фаланги пальцев по продольной оси стоп, и доской.

В принятом положении все  $\varphi_i$  равны  $0^\circ$ . Для этого случая координата центра масс испытуемого по оси  $Ox$  находится по формуле

$$X_1 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 = \frac{(R_1 - R_0)L}{P}, \quad (3.9)$$

где  $R_1$  – давление тела и доски;  $R_0$  – давление доски;  $L$  – расстояние между вершинами призм;  $P$  – вес спортсмена.

При втором измерении (рисунок 3.6) силы реакции опоры ( $R_1$ ), испытуемый приподнимает кисти рук до вертикального положения (не сдви-

гаясь с места). В этом случае ордината ОЦМ тела спортсмена находится из выражения ( $\varphi_1 = 0^\circ$ , остальные  $\varphi_i = 90^\circ$ )

$$Y_1 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 = \frac{(R_2 - R_0)L}{P - L_1}, \quad (3.10)$$

здесь  $L_1$  – длина кисти.



Рисунок 3.6 – Второе измерение силы реакции опоры  $R_2$

Измеряя давление тела и доски  $R_3$  в положении, при котором спортсмен располагает стопы ног вертикально (рисунок 3.7), определяют координаты ОЦМ тела испытуемого по оси абсцисс для всех углов  $\varphi_i = 0^\circ$ , кроме седьмого ( $\varphi_7 = 90^\circ$ ).

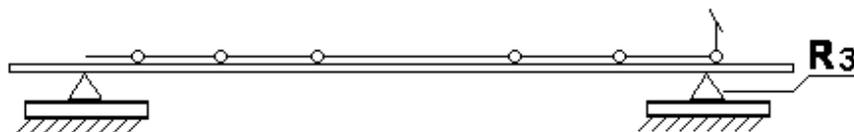


Рисунок 3.7 – Третье измерение силы реакции опоры  $R_3$

Уравнения, определяющие координату ОЦМ тела спортсмена по оси  $Ox$  при заданных углах с использованием коэффициентов  $A_i$ , имеют вид

$$X_2 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = \frac{(R_3 - R_0)L}{P}. \quad (3.11)$$

Четвертое измерение силы реакции опоры  $R_4$  производят в положении, при котором бедра ног испытуемого расположены вертикально, а остальные звенья тела находятся в горизонтальном положении (рисунок 3.8).

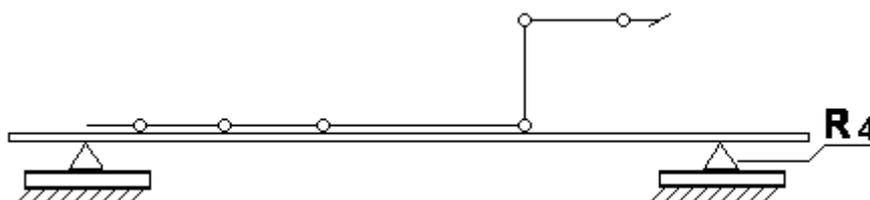


Рисунок 3.8 – Четвертое измерение силы реакции опоры  $R_4$

Для рассматриваемого положения  $\varphi_5 = 90^\circ$  остальные звенья модели образуют по отношению к опоре углы, равные нулю ( $\varphi_i = 0^\circ$ ). Для заданных углов между звеньями тела и опорой уравнение координаты ОЦМ тела спортсмена по оси абсцисс запишется в виде

$$X_3 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 = \frac{(R_4 - R_0)L}{P}. \quad (3.12)$$

Можно заметить, что в уравнении (3.12) отсутствует коэффициент  $A_5$ , связанный с изменением координаты ОЦМ тела испытуемого при сгибательно-разгибательных движениях в тазобедренных суставах. Для нахождения еще трех неизвестных коэффициентов  $A_i$  необходимо выполнить дополнительно еще три измерения силы реакции опоры при различных суставных углах.

Следующее измерение проведем при вертикальном расположении ног над опорой (рисунок 3.9).

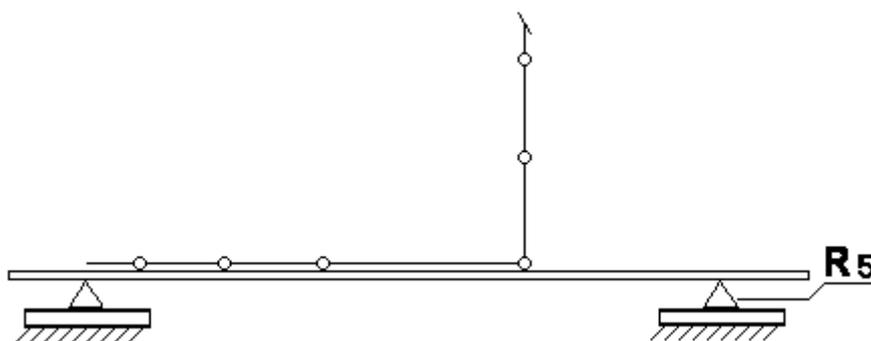


Рисунок 3.9 – Пятое измерение силы реакции опоры  $R_5$

При пятом измерении силы реакции опоры  $R_5$  первые четыре угла, если рассчитывать координату ОЦМ тела испытуемого по оси абсцисс, равны нулю, т. е.  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0^\circ$ . Остальные три угла ( $\varphi_5, \varphi_6, \varphi_7$ ) равны  $90^\circ$ . Для заданных угловых значений между звеньями модели и опорой уравнение координаты ОЦМ тела спортсмена по оси абсцисс имеет вид

$$X_4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{(R_5 - R_0)L}{P}. \quad (3.13)$$

В шестом измерении потребуем, чтобы угол между руками и туловищем составлял  $90^\circ$ . Для этого испытуемый (не сдвигаясь с места) поднимает руки до вертикального положения над опорой (рисунок 3.10).

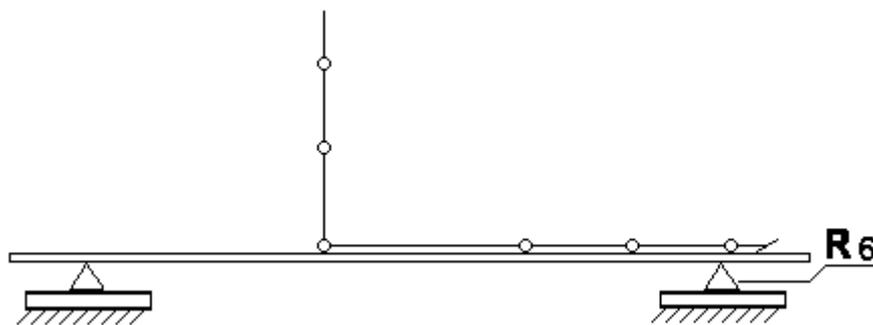


Рисунок 3.10 – Шестое измерение силы реакции опоры  $R_6$

При данном положении звеньев тела испытуемого уравнения координаты ОЦМ тела испытуемого по оси ординат примет вид

$$Y_2 = A_4 + A_5 + A_6 + A_7 = \frac{(R_6 - R_0)L}{P - L_1 - L_2 - L_3}, \quad (3.14)$$

где  $L_1, L_2, L_3$  соответственно длина кисти, предплечья, плеча.

Для заключительного измерения имеем такое расположение звеньев тела испытуемого, при котором плечи расположены вертикально над опорой (рисунок 3.11), а остальные звенья биомеханической системы занимают горизонтальное положение.

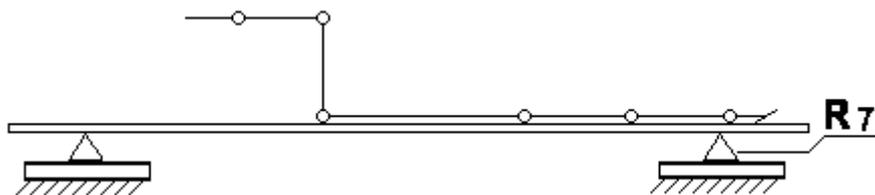


Рисунок 3.11 – Седьмое измерение силы реакции опоры  $R_7$

В этом случае определяется реакция опоры  $R_7$  при углах между звеньями тела испытуемого равными  $90^\circ$  ( $\varphi_3 = 90^\circ$ ), остальные углы –  $0^\circ$  ( $\varphi_i = 0^\circ$ ). Уравнением, определяющим координату ОЦМ тела испытуемого по оси  $O_x$ , для заданной конфигурации биомеханической системы будет:

$$X_5 = A_1 + A_2 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 = \frac{(R_7 - R_0)L}{P}. \quad (3.15)$$

Решая полученную систему уравнений (3.9–3.14), получим уравнения (3.15) для определения численных значений коэффициентов  $A_i$  по:

$$\begin{aligned} A_1 &= X_1 - Y_1; \\ A_2 &= X_5 - Y_2 - X_2; \\ A_3 &= X_1 - Y_2; \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$A_4 = X_4 - X_1 + Y_2;$$

$$A_5 = X_1 - X_3;$$

$$A_6 = X_3 - X_4 - Y;$$

$$A_7 = X_1 - X_2.$$

Описанный выше экспериментально-аналитический метод определения координат ОЦТ тела человека предполагает, в соответствии с методикой измерений, расчет коэффициентов  $A_i$  для случая, если опорным звеном модели являются кисти рук, расположенные в начале системы координат.

В то же время многие соревновательные упражнения выполняются как с опорой на руки, так и с опорой на ноги. Тогда, если опорным звеном являются стопы и они располагаются в начале базовой системы координат, то для определения коэффициентов  $B_i$  испытуемого необходимо расположить на измерительной площадке таким образом, чтобы фаланги пальцев стоп проецировались на вершину трехгранной призмы, расположенной на полу, т. е. повернуть испытуемого на  $180^\circ$ . В первом случае на вершину трехгранной призмы проецировались фаланги пальцев кистей рук (рисунок 3.4). В дальнейшем все коэффициенты  $B_i$  будут определяться относительно этого принятого исходного положения таким же образом, как и коэффициенты  $A_i$ . Однако получить значения коэффициентов  $B_i$  для положения, когда ноги являются опорным звеном, можно и аналитическим способом, приняв во внимание результаты первого измерения, с использованием коэффициентов  $A_i$  (рисунок 3.12). Продемонстрируем данный подход на примере двухзвенной модели.

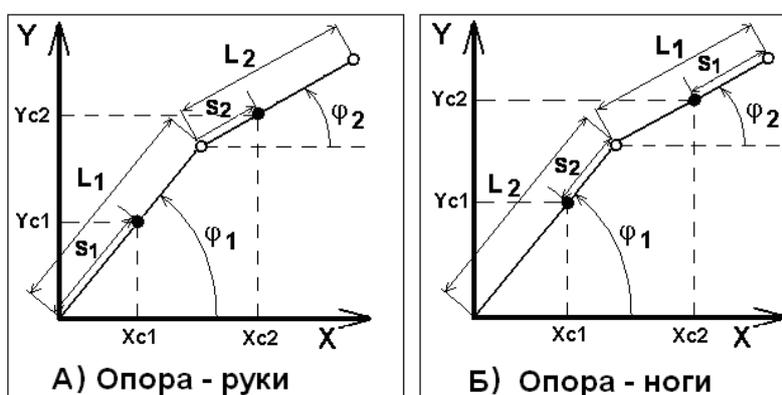


Рисунок 3.12 – Кинематическая схема двухзвенной модели ОДА человека в условиях опоры на руки (А) и на ноги (Б)

Действительно

$$X_C = \frac{P_1 X_{c1} + P_2 X_{c2}}{P_1 + P_2}, \quad Y_C = \frac{P_1 Y_{c1} + P_2 Y_{c2}}{P_1 + P_2}. \quad (3.17)$$

$$A_1 P = P_1 S_1 + P_2 L_1$$

$$A_2 P = P_2 S_2$$

$$B_1 P = P_2(L_2 - S_2) + P_1 L_2 = P_2 L_2 + P_1 L_2 - P_2 S_2 = L_2 P - A_2 P$$

$$B_2 P = P_1(L_1 - S_1) = P_1 L_1 - P_1 S_1 = P_1 L_1 - (A_1 - P_2 L_1) = L_1 P - A_1 P.$$

Отсюда:

$$B_1 = L_2 - A_2, \quad B_2 = L_1 - A_1. \quad (3.18)$$

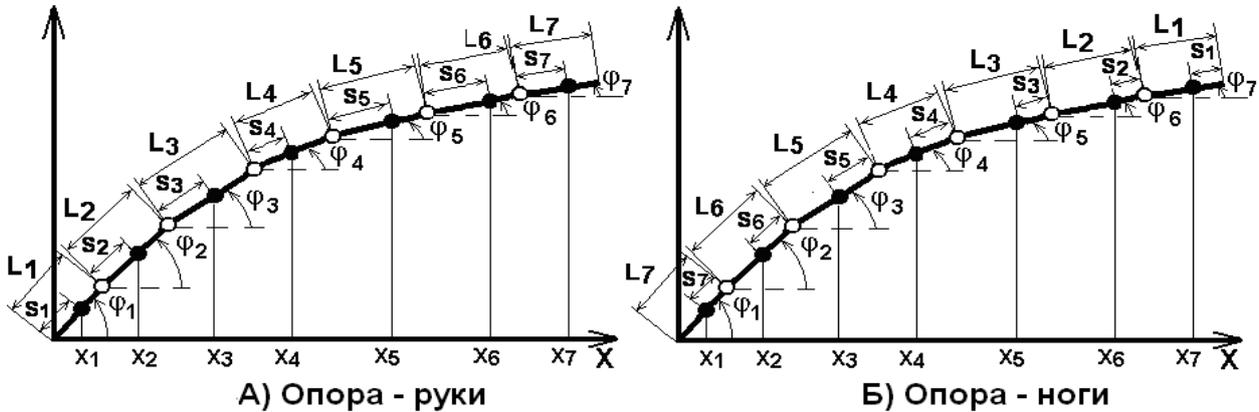


Рисунок 3.13 – Кинематическая схема семизвенной модели ОДА человека в условиях опоры на руки (А) и на ноги (Б)

Тогда для рассматриваемой семизвенной модели (рисунок 3.13) могут быть получены следующие формульные зависимости для координат ОЦТ:

$$X_C = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + P_4 x_4 + P_5 x_5 + P_6 x_6 + P_7 x_7}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7},$$

$$Y_C = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + P_4 y_4 + P_5 y_5 + P_6 y_6 + P_7 y_7}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7}.$$

Коэффициенты  $B_i$  запишем в виде:

$$B_1 = L_7 - A_7;$$

$$B_2 = L_6 - A_6;$$

$$B_3 = L_5 - A_5;$$

$$B_4 = L_4 - A_4;$$

$$B_5 = L_3 - A_3;$$

$$B_6 = L_2 - A_1;$$

$$B_7 = L_1 - A_1.$$

Получим

$$B_i = L_{N-i+1} - A_{N-i+1}.$$

### 3.4 Моменты инерции сегментов тела

Как известно, любое материальное тело обладает свойством инертности. Причем это свойство проявляется только при изменении величины или направления скорости. В соответствии с законом инерции движущийся объект будет продолжать равномерное прямолинейное движение, пока на него не подействует сила [101, с. 45]. Мерой инертности в поступательных движениях является его масса, а во вращательном движении – момент инерции.

Численно момент инерции определяется суммой произведений элементарных масс тела на квадрат расстояния этих масс до оси вращения:

$$J = \sum_i m_i r_i^2 \quad (3.19)$$

Определение момента инерции произвольного тела – сложная задача. Одним из наиболее простых способов определения моментов инерции сегментов является их представление в виде стержней, однако данному подходу присущи большие погрешности. Более точным является метод аппроксимации звеньев тела и сегментов различными геометрическими фигурами [8; 13]. Представляя части тела человека в виде тел правильной геометрической формы с равномерно распределенной массой, вычисляют по соответствующим формулам их масс-инерционные характеристики. К примеру, аппроксимируя звенья тела и сегменты усеченными конусами [14], определяют момент инерции сегментов тела человека по табличным данным М.Ф. Фаворина (1970) [95], которые позволяют, зная отношение радиусов конуса и его высоту, выразить искомые величины посредством введения соответствующих коэффициентов в расчетные формулы.

Наиболее точным расчетным методом определения центральных моментов инерции сегментов тела человека на сегодняшний день считается использование уравнений множественной регрессии, коэффициенты которых получены по результатам прижизненной радиоизотопной диагностики [46]. Его погрешность не превышает 3 %. В результате выполненных исследований авторами [46] были определены коэффициенты  $B_i$  уравнений множественной регрессии вида

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2, \quad (3.20)$$

где  $Y$  – центральный момент инерции сегмента тела,  $X_1$  – вес тела,  $X_2$  – длина тела (рост),  $B_i$  – коэффициенты уравнений множественной регрессии (таблица 3.6).

Таблица 3.6 – Коэффициенты для определения центральных моментов инерции сегментов тела (по данным В.М. Зациорского, 1981)

№	Сегмент	$B_0$	$B_1$	$B_2$
1	Стопа	-97,09	0,414	0,616
2	Голень	-1152,00	4,594	6,815
3	Бедро	-3690,00	32,020	19,240
4	Кисть	-13,68	0,088	0,092
5	Предплечье	-67,90	0,855	0,376
6	Плечо	-232,00	1,525	1,343
7	Голова	-112,00	1,430	1,730
8	Верхняя часть туловища	367,00	18,300	-5,730
9	Средняя часть туловища	263,00	26,700	-8,000
10	Нижняя часть туловища	-934,00	11,800	3,440

### 3.5 Момент инерции биомеханической системы

Если известен центральный момент инерции тела относительно какой-либо оси, то можно определить и его момент инерции относительно параллельной оси, расположенной на произвольном расстоянии от первой. С этой целью можно воспользоваться формулой

$$J_0 = J_c + mr^2, \quad (3.21)$$

где  $J_0$  – момент инерции тела относительно оси вращения,  $J_c$  – центральный момент инерции тела,  $m$  – масса тела,  $r$  – расстояние от оси вращения до ЦМ тела.

*В механике момент инерции материальной системы, состоящей из нескольких твердых тел с известными моментами инерции, определяют как сумму моментов инерции всех твердых тел, входящих в систему, относительно той же оси [9; 93; 86].*

Уравнения для определения момента инерции системы тел имеют вид

$$J_0 = \sum_{i=1}^n J_{c_i} + \sum_{i=1}^n m_i r_i^2, \quad (3.22)$$

где  $J_0$  – момент инерции системы тел относительно оси вращения  $O$ ,  $J_{c_i}$  – центральный момент инерции  $i$ -го тела,  $m_i$  – масса  $i$ -го тела,  $r_i$  – расстояние от ЦМ  $i$ -го тела до оси вращения  $O$ ,  $i$  – порядковый номер тела,  $n$  – количество тел в системе.

В развернутой записи для рассматриваемой шестизвеной биомеханической системы уравнения, определяющие момент инерции системы тел относительно оси вращения  $O$ , находятся из выражения

$$Y_o = Y_{c_1} + Y_{c_2} + Y_{c_3} + Y_{c_4} + Y_{c_5} + Y_{c_6} + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2 + m_5 r_5^2 + m_6 r_6^2 \quad (3.23)$$

### 3.6 Линейная скорость и линейное ускорение ОЦМ биомеханической системы

Поставленная задача методики определения линейной скорости и линейного ускорения может быть решена следующим образом. Необходимо продифференцировать уравнение координат ОЦМ в развернутом виде (3.8) по времени:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_c &= A_1 \dot{Q}_1 \cos Q_1 + A_2 \dot{Q}_2 \cos Q_2 + A_3 \dot{Q}_3 \cos Q_3 + A_4 \dot{Q}_4 \cos Q_4 + A_5 \dot{Q}_5 \cos Q_5 + A_6 \dot{Q}_6 \cos Q_6; \\ \dot{X}_c &= -A_1 \dot{Q}_1 \sin Q_1 - A_2 \dot{Q}_2 \sin Q_2 - A_3 \dot{Q}_3 \sin Q_3 - A_4 \dot{Q}_4 \sin Q_4 - A_5 \dot{Q}_5 \sin Q_5 - A_6 \dot{Q}_6 \sin Q_6; \end{aligned} \quad (3.24)$$

Результирующую скорость ОЦМ ( $R$ ) найдем из выражения

$$R = \sqrt{X_c^2 + Y_c^2}. \quad (3.25)$$

Для  $N$ -звенной модели биомеханической системы на основании уравнений (3.8) получим:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_c &= \sum_{i=1}^N A_i \dot{Q}_i \cos Q_i, \\ \dot{X}_c &= -\sum_{i=1}^N A_i \dot{Q}_i \sin Q_i. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Выполнив дифференцирование уравнения (3.26) по времени, получим выражение, определяющее линейное ускорение ОЦМ шестизвеной модели ОДА тела человека по осям  $Oy$ ,  $Ox$ :

$$\begin{aligned}
\ddot{Y}_c &= A_1 \ddot{Q}_1 \cos Q_1 + A_2 \ddot{Q}_2 \cos Q_2 + A_3 \ddot{Q}_3 \cos Q_3 + \\
&+ A_4 \ddot{Q}_4 \cos Q_4 + A_5 \ddot{Q}_5 \cos Q_5 + A_6 \ddot{Q}_6 \cos Q_6 - \\
&- A_1 \dot{Q}_1^2 \sin Q_1 - A_2 \dot{Q}_2^2 \sin Q_2 - A_3 \dot{Q}_3^2 \sin Q_3 - \\
&- A_4 \dot{Q}_4^2 \sin Q_4 - A_5 \dot{Q}_5^2 \sin Q_5 - A_6 \dot{Q}_6^2 \sin Q_6; \\
\ddot{X}_c &= A_1 \ddot{Q}_1 \sin Q_1 + A_2 \ddot{Q}_2 \sin Q_2 + A_3 \ddot{Q}_3 \sin Q_3 + \\
&+ A_4 \ddot{Q}_4 \sin Q_4 + A_5 \ddot{Q}_5 \sin Q_5 + A_6 \ddot{Q}_6 \sin Q_6 - \\
&- A_1 \dot{Q}_1^2 \cos Q_1 - A_2 \dot{Q}_2^2 \cos Q_2 - A_3 \dot{Q}_3^2 \cos Q_3 - \\
&- A_4 \dot{Q}_4^2 \cos Q_4 - A_5 \dot{Q}_5^2 \cos Q_5 - A_6 \dot{Q}_6^2 \cos Q_6.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Тогда для  $N$ -звенной биомеханической системы можем записать:

$$\begin{aligned}
\ddot{Y}_c &= \sum_{i=1}^N A_i \ddot{Q}_i \cos Q_i - \sum_{i=1}^N A_i \dot{Q}_i^2 \sin Q_i, \\
\ddot{X}_c &= -\sum_{i=1}^N A_i \ddot{Q}_i \sin Q_i - \sum_{i=1}^N A_i \dot{Q}_i^2 \cos Q_i.
\end{aligned} \tag{3.28}$$