УДК 378.147

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ КАК СРЕДСТВО ОБОБЩЕНИЯ И СИСТЕМАТИЗАЦИИ ЗНАНИЙ

М. С. Маскина
ФКОУ ВО «Академия права и управления Федеральной службы исполнения наказаний Российской Федерации», заместитель начальника кафедры математики и информационных технологий управления экономического факультета, кандидат педагогических наук, доцент

Для развития экономики и общества в целом требуются не только профессионалы, способные к самостоятельному выбору методов или способов решения поставленных перед ними задач, поиску необходимой информации, саморазвитию, но и руководители, способные предвидеть результаты принятых ими решений и грамотно организовать работу сотрудников. Чтобы появились руководители такого уровня, необходимо еще при обучении в образовательной организации снабдить будущих управленцев не только совокупностью готовых методов и алгоритмов решения задач [1], но и развивать умение видеть проблему целиком, способность подходить к ситуации комплексно, чтобы отслеживать намечающиеся тенденции и направлять их в нужное русло [2]. В основе этой способности лежит синтетическое мышление и умения обобщать и систематизировать накопленные данные из различных областей знаний.

Однако одной из современных проблем образования, причем и среднего, и высшего, является разрозненность материала не только различных учебных дисциплин, но даже различных тем одной дисциплины. Введение в связи со сложной санитарно-эпидемиологической ситуацией дистанционных образовательных технологий только усилило данный разрыв, что неоднократно отмечалось автором ранее [3; 4].

Решение указанной проблемы должно начаться с младших курсов и быть комплексным. С одной стороны, на занятиях по учебным предметам, не относящимся к дисциплинам специализации, необходимо систематически иллюстрировать рассматриваемый понятийный аппарат ситуациями прикладного содержания, связанными с будущей профессиональной деятельностью [5], а с другой, на факультативных курсах или в рамках работы научного кружка следует обобщать и систематизировать изученный ранее материал.

Опыт организации подобного обобщения в рамках кружковой работы с обучающимися младших курсов был описан автором ранее [6] на примере решения уравнений в целых числах, содержательный материал которого позднее был оформлен в виде монографии [7]. В настоящее время идет активная апробация курса «Решение заданий с параметрами» среди математически одаренных курсантов экономического факультета Академии ФСИН России. Выбор данной тематики обусловлен, в первую очередь, необходимостью повторения и обобщения школьных знаний первокурсников, большинство из которых не сдавали ОГЭ и обучались два года в условиях санитарных ограничений, вызванных эпидемией COVID-19.

Кроме того, ни в средней школе, ни в вузе не предусмотрено изучение темы «Задачи с параметрами», хотя такие задания содержатся в предпоследнем номере тестов профильного уровня ЕГЭ по математике. Материал этот появляется иногда в конце рассмотрения некоторых тем школьных учебников по алгебре в виде «задач со звездочкой», является весьма фрагментарным и разбросанным по разным публикациям, поэтому для его систематизации автором и был разработан элективный курс «Решение заданий с параметрами». В рамках этого курса была проведена классификация основных методов и приемов решения заданий с параметрами средствами, доступными для старшеклассников и первокурсников. Каждый из рассматриваемых методов решения снабжен подробной иллюстрацией особенностей его применения на примерах и подборкой задач для самостоятельного решения. Тематический план данного элективного курса, рассчитанного на 36 часов, приведен в табл. 1.

Таблица 1

Тематический план эклективного курса «Решение заданий с параметрами»

№ п/п	Название темы	Кол-во часов
Введение. Основные элементарные функции, их свойства, графики, преобразования графиков		3
I. Повторение.		9
1.	Основные методы решения рациональных уравнений и неравенств. Теорема Безу и ее следствия	2
2.	Основные методы решения уравнений и неравенств с модулем	2
3.	Решение простейших задач с параметрами, входящих в ОГЭ 9 класса	2
4.	Решение задач с параметрами с применением свойств квадратного трехчлена и его графика	3
II. Графический метод решения задач с параметрами		12
1.	Прямые	2
2.	Параболы	2
3.	Гиперболы	1

Окончание табл.

4.	Окружности	2
5.	Плоскость xOa	3
6.	Метод двух функций	2
III. Аналитический метод решения задач с параметрами		10
1.	Перебор частных случаев	2
2.	Сведение к квадратному уравнению	2
3.	Применение свойств монотонности функций	3
4.	Различные задачи	4
Заключение		2

Каждая тема основной части элективного курса посвящена рассмотрению одного из методов решения задач с параметрами с подробной иллюстрацией особенностей его применения на примерах и подборкой задач для самостоятельного изучения, остановимся чуть подробнее на одной из них, а именно методе двух функций.

Пример. Найти все значения параметра a, при которых наименьшее значение функции $f(x) = ax - 2a - 1 + |x^2 - x - 2|$ меньше, чем –2.

Решение.

Как бы ни раскрывался модуль, функция $f(x)$ будет определена и непрерывна на всей числовой прямой, причем при $x \to \pm\infty$ значение функции будет стремиться к $+\infty$. Тогда можно сделать вывод, что функция будет достигать своего наименьшего значения, а, значит, условие задачи можно переформулировать следующим образом: «Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$ax - 2a - 1 + |x^2 - x - 2| < 2$$

имеет хотя бы одно решение».

Приведем последнее неравенство к виду

$$|x^2 - x - 2| < -ax + 2a - 1 \qquad (1)$$

и рассмотрим функций $u(x) = |x^2 - x - 2|$ и $g(x) = -ax + 2a - 1$.

Графиком функций $u(x) = |x^2 - x - 2| = |(x - 0{,}5)^2 - 2{,}25|$ является парабола, отрицательные значения которой отражены относительно оси абсцисс (рис. 1). Функция $g(x) = a(2 - x) - 1$ задает на координатной плоскости пучок прямых, проходящих через точку A (2; –1).

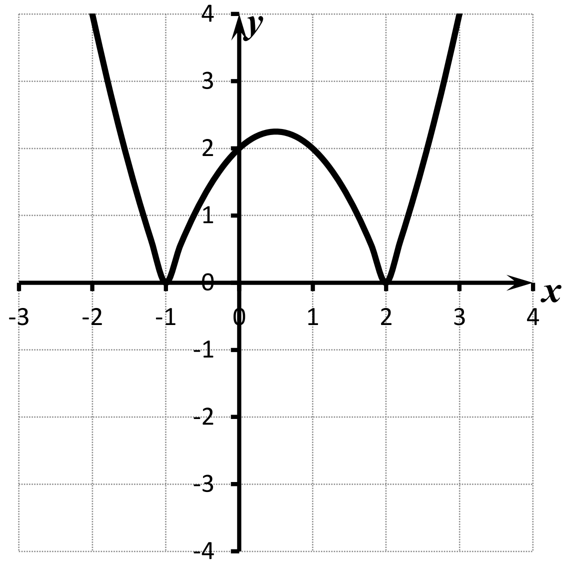

Рис. 1

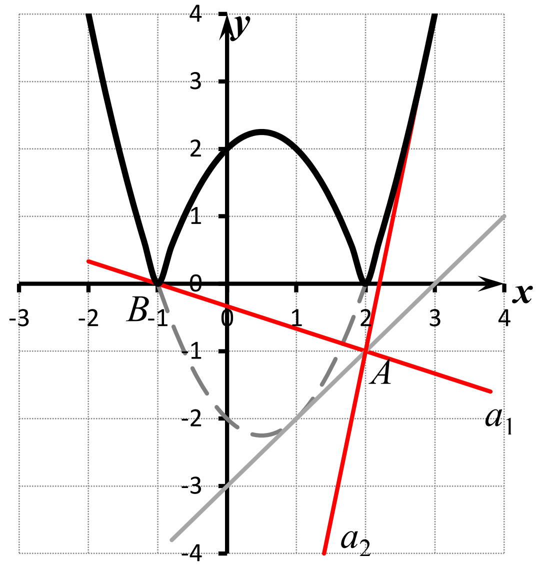

Рис. 2

Неравенство (1) будет иметь решения только тогда, когда часть прямой этого пучка будет лежать выше графика функции $y = u(x)$ (рис. 2). Данному условию будут удовлетворять все прямые пучка, расположенные между прямыми a_1 и a_2, то есть убывающие быстрее, чем прямая a_1 или возрастающие быстрее, чем a_2.

Прямая a_1 проходит через точку B (–1; 0). Подставив эти координаты в уравнение прямой, получим:

$$a_1(2+1)-1=0 \quad \text{или} \quad a_1=\frac{1}{3}.$$

Прямая a_2 является касательной к графику функции $y = u(x)$, причем точка касания располагается в той части графика, которая не отражалась от оси абсцисс. Тогда найдем искомый параметр a_2 из геометрического смысла производной и условия наличия единственной общей точки касательной и графика функции: $\begin{cases} u'(x)=g'(x), \\ u(x)=g(x). \end{cases}$

$$\begin{cases} (x^2-x-2)'=(-ax+2a-1)', \\ x^2-x-2=-ax+2a-1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-1=-a, \\ x^2-x-2=(2x-1)x-2(2x-1)-1; \end{cases} \quad \begin{cases} a=-2x+1, \\ x^2-4x+3=0. \end{cases}$$

Второе уравнение последней системы имеет два корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$, подставив которые в первое уравнение, получим $a = -1$ или $a = -5$.

Если $a = -1$, то прямая $g(x) = x-3$ не касается графика функции $y = u(x)$. Если $a = -5$, то прямая $g(x) = 5x-11$ касается графика функции $y = u(x)$ и совпадает с прямой a_2 (рис. 2).

Ответ: $a \in (-\infty;-5) \cup \left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Заметим, что при решении примера использовались не только знания основных элементарных функций и навыка строить и преобразовывать их графики, но и умения грамотно оперировать такими понятиями, как непрерывность функции, ее предел, производная и ее геометрический смысл. Приведенный пример наглядно демонстрирует, что решение задач с параметрами не только позволяет обобщить и систематизировать полученные в школе знания по темам «Функция», «Решение уравнений», «Производная и ее приложения», но и способствует развитию синтетического и стратегического мышления.

1. Маскина М. С. Применение алгоритмического метода обучения на занятиях по дисциплинам математического цикла // Стандарты и мониторинг в образовании. 2020. Т. 8, № 5. С. 43–48. Вернуться к статье
2. Маскина М. С., Давыдочкина С. В. О проблемах математической подготовки будущих экономистов // Стандарты и мониторинг в образовании. 2022. Т. 10. № 5. С. 31–36. Вернуться к статье
3. Маскина М. С., Давыдочкина С. В. Организация педагогического общения при электронном обучении математическим дисциплинам // Профильная школа. 2021. Т. 9. № 2. С. 41–47. Вернуться к статье
4. Давыдочкина С. В., Маскина М. С. Опыт организации электронного обучения курсантов и студентов Академии ФСИН России дисциплинам математического цикла // Ведомости уголовно-исполнительной системы. 2021. № 5. С. 26–34. Вернуться к статье
5. Давыдочкина С. В., Маскина М. С. Проблемы математической подготовки обучающихся экономическим специальностям на примере Академии ФСИН России // Ведомости уголовно-исполнительной системы. 2022. № 8 (243). С. 49–56. Вернуться к статье
6. Маскина М. С., Давыдочкина С.В. О решении уравнений в целых числах при подготовке к сдаче профильного уровня ЕГЭ по математике // Профильная школа. 2018. Т. 6, № 4. С. 41–49. Вернуться к статье
7. Маскина М. С., Моисеев С. А. Диофантовы уравнения : моногр. Рязань : Акад. ФСИН России, 2019. 234 с. Вернуться к статье