Глава I

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ В ИССЛЕДОВАНИИ ТЕХНИКИ СПОРТИВНЫХ УПРАЖНЕНИЙ

1.1 Понятие модели, моделирование

В современной литературе дается огромное количество определений модели. Модель (фр. modèle, от лат. modulus – «мера, аналог, образец») – это упрощенное представление реального устройства или протекающих в нем процессов, явлений [89].

Модель – это образ (условный или мысленный), план, график, описание, чертеж, схема чего-либо, определенная модель, находящаяся в некотором соответствии с изучаемым объектом и на определенном этапе в процессе исследования способная давать информацию о самом объекте [68].

Согласно В.Н. Селуянову, «модель – это естественный или искусственный, материальный или идеальный заменитель объекта, который имеет общие свойства с изучаемым объектом» [87, с. 65].

По определению, которое дает Б.А. Штофф, «модель – это мысленно представляемая или материально реализованная система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что ее изучение дает нам новую информацию об этом объекте» [100, с. 93].

Из указанных определений становится понятно, что основной функцией модели является получение новой информации об изучаемом процессе или явлении, а задача моделирования – изучение объекта на основе создания и исследования его копии, замещающей оригинал с тех сторон, которые интересуют познание.

Моделирование всегда предполагает принятие допущений той или иной степени важности. При этом данная модель должна удовлетворять следующим требованиям:

- точность, то есть степень совпадения полученных данных в процессе моделирования с данными заранее установленными;
- надежность модели, т. е. способность модели давать необходимую информацию вне зависимости от того, кто этой моделью пользуется;
- адекватность модели, т. е. соответствие модели исходной реальной системе и учет, прежде всего, наиболее важных качеств, связей и характеристик;
- универсальность модели, т. е. применимость модели к анализу ряда однотипных систем, что расширяет область применения модели для решения более широкого круга задач;
- целесообразность модели, т. е. точность получаемых результатов и общность решения задачи, которые должны увязываться с затратами на моделирование [19].

Основой всех видов моделирования является теория подобия, согласно которой два явления подобны, если по заданным характеристикам одного явления можно получить характеристики другого. Согласно этой теории, подобие возможно лишь при замене одного моделируемого объекта другим, точно таким же [70]. Следует отметить, что абсолютного подобия добиться практически невозможно, поэтому в зависимости от полноты модели выделяют следующие классы моделей: полные, неполные, приближенные.

На наш взгляд, такая классификация моделей не несет методологической нагрузки, которая позволила бы определить общую направленность моделируемого процесса в плане его содержательной и конструктивной сущности.

Существенно большей классификационной общностью обладает способ дифференцирования моделей, предложенный Б.Я. Советовым и С.А. Яковлевым [89]. Предлагаемая классификация (рисунок 1.1) достаточно системно объединяет различные виды моделирования и охватывает широкий спектр моделируемых процессов, объектов и явлений.

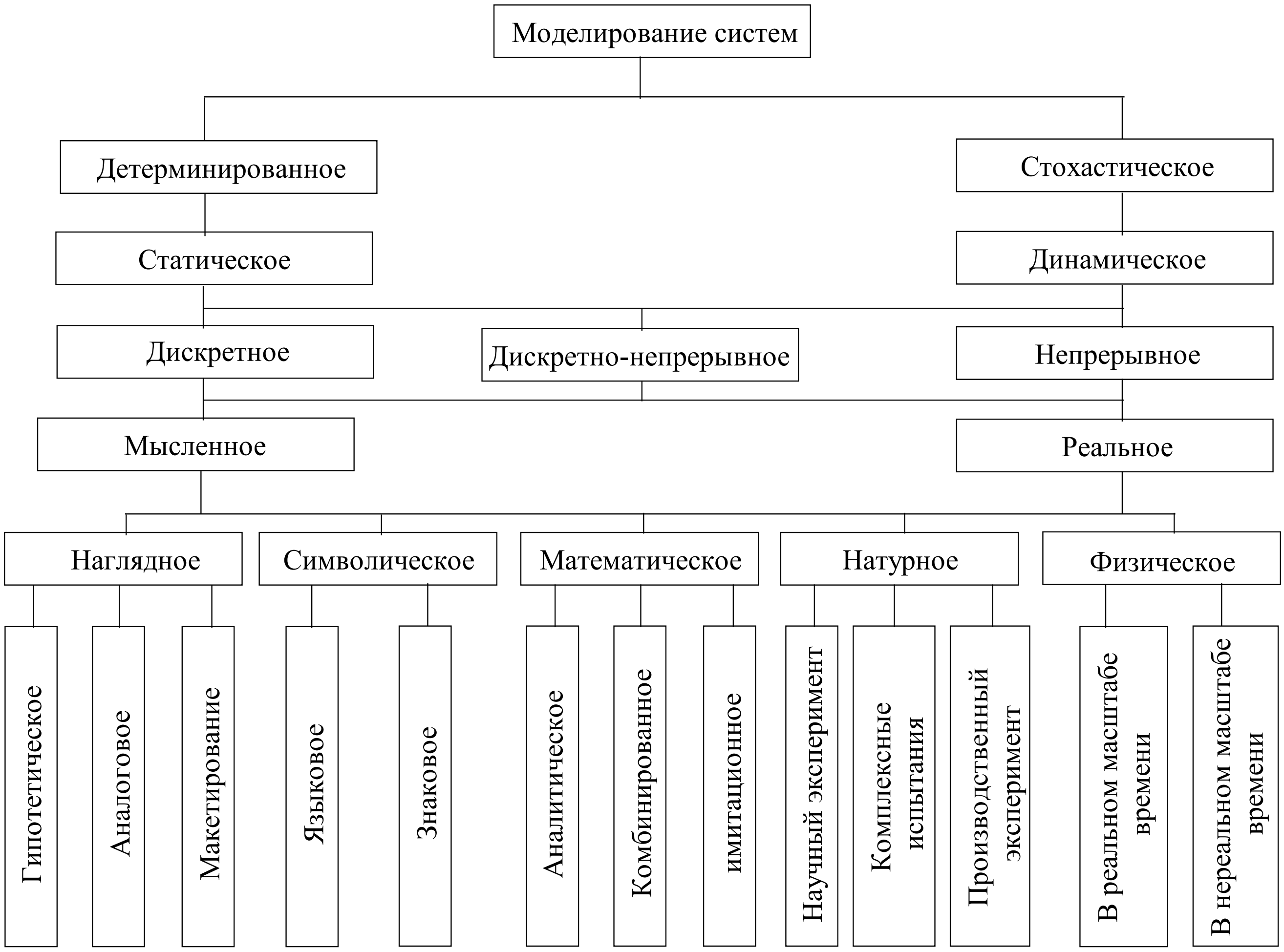

Рисунок 1.1 – **Классификация видов моделирования (по Советову Б.Я., Яковлеву С.А.)**

По условиям и характеру изучаемых процессов в системе авторы классификационной схемы (рисунок 1.1) выделяют следующие виды моделирования:

1. Детерминированное моделирование, отображающее причинно-следственные связи и процессы, в которых отсутствуют любые случайные воздействия.

2. Стохастическое моделирование, которое отображает вероятностные процессы и события.

3. Статическое моделирование, которое описывает поведение объекта в какой-либо момент времени.

4. Динамическое моделирование, которое отражает эволюцию исследуемого объекта во времени.

5. Дискретное моделирование, служащее для описания процессов, которые предполагаются дискретными.

6. Непрерывное моделирование, которое отражает непрерывные процессы в системах.

7. Дискретно-непрерывное моделирование, которое используется для описания дискретных и непрерывных процессов в изучаемой системе.

В зависимости от назначения модели ее форма может быть различной: мысленные, реальные, материальные модели. Так, материальные модели могут быть представлены как в виде твердого тела (без деформации), так и с возможностью изменения его отдельных сегментов (деформируемые) [20].

Рассматривая модель в плане исследований движений человека, можно выделить моделирование физического характера и моделирование математического характера [90].

Физическое моделирование осуществляется на специальных установках, воспроизводящих природу явлений в двух масштабах времени:

- реальном;
- нереальном (исследуются так называемые «замороженные» процессы, фиксируемые в некоторый момент времени).

Математическое моделирование – процесс установления соответствия реальному объекту математического объекта, называемого математической моделью. Выделяют три вида математического моделирования [88; 89]:

- аналитическое моделирование – процесс функционирования элементов системы и системы в целом, который записывается в форме функциональных соотношений (алгебраических, интегро-дифференциальных, конечно-разностных);
- имитационное моделирование – моделирующий алгоритм воспроизводит процесс функционирования исследуемой системы во времени, что позволяет по исходным данным получать информацию о состоянии процесса в определенные моменты времени.

В настоящее время имитационное моделирование – наиболее эффективный, а часто и единственный доступный метод исследования больших систем. Имитационное моделирование на электронно-вычислительной машине (далее – ЭВМ) положено в основу структурного, алгоритмического и параметрического синтеза больших систем, которые являются оптимальными по некоторым критериям оценки эффективности;

- комбинированное моделирование (аналитико-имитационное) объединяет достоинства аналитического и имитационного моделирования.

В ходе математического моделирования в большинстве случаев используются механико-математические модели, позволяющие получить числовые данные необходимых кинематических и динамических характеристик спортивных упражнений [20; 17; 71].

Создание таких математических моделей базируется на теоретических знаниях об изучаемом двигательном действии и экспериментальных данных, полученных механико-электрическими и оптико-электронными методами.

В данном случае механико-математические модели представляют собой ОДА тела человека. В научных исследованиях общепринятым подходом при моделировании ОДА тела человека является представление его в виде системы твердых тел, связь между которыми осуществляется идеальными шарнирами различной конфигурации. Процесс моделирования в данном случае предполагает решение дифференциальных уравнений второго порядка. Модели такого типа использовались различными авторами для имитации спортивных упражнений [43; 44; 59; 25; 60; 1; 77; 45].

Данная биомеханическая модель в плане своих функций способна решать две задачи: анализ двигательного действия и синтез на основе заданных заранее наборов требуемых свойств.

1.2 Шестизвенная модель опорно-двигательного аппарата тела человека

Модель изучаемого объекта – это всегда некое упрощение, поэтому для модели всегда возникает вопрос проверки ее адекватности, иначе говоря, это проверка функционирования модели, которое совпадает с функционированием реально изучаемого объекта в тех аспектах, которые интересуют исследователя. Многочисленные исследования показали адекватность моделей ОДА тела человека в виде системы твердых тел, соединенных посредством идеальных шарниров. В этом случае модели различных движений отличаются числом рассматриваемых звеньев, которое определяется, прежде всего тем, в каких суставах спортсмена совершаются сгибательно-разгибательные действия. Так, для моделирования многих гимнастических упражнений, в частности, оборотовых упражнений на перекладине, достаточно прибегнуть к трехзвенной модели (руки, туловище и ноги), потому что сгибание осуществляется только в плечевых и тазобедренных суставах.

Для построения расчетных моделей анализа движений тяжелоатлета рассмотрим кинематическую схему шестизвенной модели ОДА тела человека (рисунок 1.2), в которой стопа – первое звено, голень – второе звено, бедро – третье звено, туловище с головой – четвертое звено, плечо – пятое звено, предплечье (вместе с удерживаемым спортсменом снарядом) – шестое звено.

С помощью данной модели можно исследовать кинематику и динамику техники тяжелоатлетических упражнений [21; 24; 26; 27].

На принятую модель наложены ограничения:

1. Звенья тела человека и гриф штанги считаются абсолютно твердыми телами.

2. Суставы, посредством которых звенья тела человека соединяются друг с другом, моделируются цилиндрическими шарнирами.

3. Трение в шарнирах отсутствует.

4. Центры масс (далее – ЦМ) звеньев модели расположены на прямой, соединяющей их оси вращения в шарнирах (на продольной оси звена).

5. Распределение масс внутри каждого звена неизменно.

6. Масс-инерционные характеристики звеньев модели совпадают с соответствующими среднестатистическими параметрами сегментов тела тяжелоатлета.

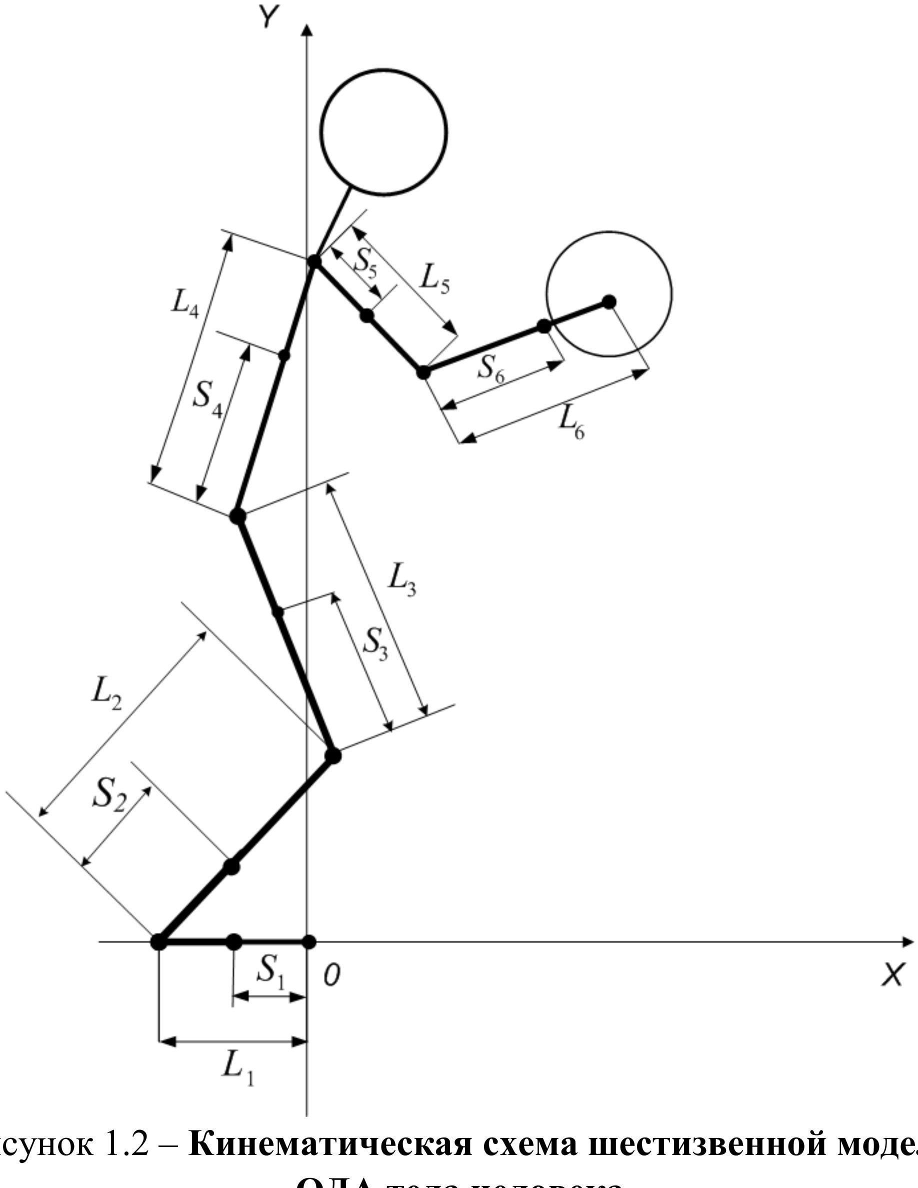

Рисунок 1.2 – **Кинематическая схема шестизвенной модели ОДА тела человека**

7. Звенья тела человека и гриф штанги считаются абсолютно твердыми телами.

8. Суставы, посредством которых звенья тела человека соединяются друг с другом, моделируются цилиндрическими шарнирами.

9. Трение в шарнирах отсутствует.

10. ЦМ звеньев модели расположены на прямой, соединяющей их оси вращения в шарнирах (на продольной оси звена).

11. Распределение масс внутри каждого звена неизменно.

12. Масс-инерционные характеристики звеньев модели совпадают с соответствующими среднестатистическими параметрами сегментов тела тяжелоатлета.

Введем в кинематическую схему модели обозначения:

L_1 – длина первого звена (стопа);

L_2 – длина второго звена (голень);

L_3 – длина третьего звена (бедро);

L_4 – длина четвертого звена (туловище);

L_5 – длина пятого звена (плечо);

L_6 – длина шестого звена (предплечье);

S_1 – расстояние от опоры до ЦМ стопы;

S_2 – расстояние от голеностопного сустава до центра масс голени;

S_3 – расстояние от коленного сустава до центра масс бедра;

S_4 – расстояние от тазобедренного сустава до ЦМ туловища;

S_5 – расстояние от плечевого сустава до центра масс предплечья;

S_6 – расстояние от локтевого сустава до центра штанги;

φ_1 – угол, образованный первым звеном с осью Ox;

φ_2 – угол, образованный вторым звеном с осью Ox;

φ_3 – угол, образованный третьим звеном с осью Ox;

φ_4 – угол, образованный четвертым звеном с осью Ox;

φ_5 – угол, образованный пятым звеном с осью Ox;

φ_6 – угол, образованный шестым звеном с осью Ox.

Данная модель фактически является частным случаем неразветвленной биомеханической модели с произвольным количеством звеньев биосистемы. Введем буквенную индексацию для обозначения номера звена. При этом индекс может быть выражен, если это не оговорено заранее, любой буквой латинского алфавита. Например, запись (X_i, X_j, X_z , . . . , X_s), означает совершенно одно и то же, т. е. элемент под номером, соответствующим буквенному индексу одномерного массива X. Для принятой модели имеем:

L_i – длина i-го звена;

S_i – расстояние от оси вращения i-го звена до его ЦМ;

φ_i – угол наклона i-го звена к оси Ox (обобщенные координаты i-го звена);

i – буквенный индекс, используемый для обозначения номера звена (i=1, 2, ..., N);

N – количество звеньев модели.

В кинематическом анализе движений биомеханических систем необходимы сведения и о пространственно-временных характеристиках (угловых скоростях и угловых ускорениях звеньев тела спортсмена). С этой целью введем обозначения для первой и второй производной по времени от обобщенных координат для N-звенной модели биомеханической системы:

$\dot{\varphi}_i$ – угловая скорость i-го звена;

$\ddot{\varphi}_i$ – угловое ускорение i-го звена;

i – буквенный индекс, обозначающий номер звена.

В связи с тем, что за обобщенные координаты биомеханической системы приняты φ_i, то $\dot{\varphi}_i$ и $\ddot{\varphi}_i$ соответственно будут обозначать обобщенную скорость и обобщенное ускорение i-го звена.

Аналогично в буквенной индексации, распространяемой на N-звенную модель биомеханической системы, введем следующие идентификаторы для обозначения масс-инерционных характеристик звеньев биосистемы:

P_i – вес i-го звена;

m_i – масса i-го звена;

J_i – центральный момент инерции i-го звена:

i – буквенный индекс, обозначающий номер звена.

1.3 Моделирование движений без управляющих воздействий

В процессе выполнения спортивных упражнений на тело спортсмена действуют как внешние, так и внутренние, в частности, мышечные силы. Нахождение численных значений величины силы тяги мышц с помощью инструментальных методов исследования связано с существенными трудностями. Одним из подходов, позволяющим дать численную оценку развиваемых спортсменом мышечных усилий при выполнении спортивных упражнений, является аналитический расчет значений управляющих моментов мышечных сил в суставах. Для этого необходимы уравнения, описывающие ОДА спортсмена, в которые моменты мышечных сил будут входить в качестве параметров движения.

Рассмотрим естественное движение *N*-звенной биомеханической системы, т. е. такое движение, при котором движущийся объект не вырабатывает управляющих воздействий [54; 55].

Для биомеханической системы отсутствие управления означает, что в процессе выполнения спортивного упражнения величина управляющих моментов мышечных сил на рассматриваемом участке траектории равна нулю. То есть спортсмен выполняет упражнение, не реализуя силу тяги мышц в суставах. В аналитическом представлении в уравнениях движения это обстоятельство отражается в символической записи величины моментов мышечных сил во всех суставах спортсмена, равной нулю. Такое движении по классификации В.Г. Коренева (1974) относится к естественным движениям [56].

Дифференциальные уравнения движения такой системы можно записать в форме уравнений Лагранжа второго рода [15; 16; 51].

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_m} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_m} = F_m, \qquad (1.1)$$

где T – кинетическая энергия системы; φ_m – обобщенные координаты ($m=1, \dots, N$); $\dot{\varphi}_m$ – обобщенные скорости ($m=1, \dots, N$); F_m – обобщенные силы; N – число степеней свободы.

В качестве обобщенных координат возьмем углы наклона звеньев к оси Ox. Кинетическую энергию рассматриваемой биомеханической системы определим из формульного выражения [45]

$$T=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}A_{ii}\dot{\varphi}_i^2+2\sum_{i=1}^{N}A_{ij}\sum_{j=i+1}^{N}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j\cos(\varphi_j-\varphi_i)\right], \tag{1.2}$$

где A_{ij} – элементы матрицы динамических коэффициентов размером $N\times M$, определяемых через значения масс-инерционных характеристик звеньев модели:

- массы звеньев m_i;
- длины звеньев L_i;
- расстояния до центров масс звеньев S_i;
- центральные моменты инерции звеньев J_i:

$$A_{ij}=\begin{cases}\delta_{ij}\,(J_i+m_i\,S_i^{\,2})+m_j\,L_i\,S_j\,(1-\delta_{ij})+\sum\limits_{k=j+1}^{N}m_kL_iL_j, & j\ge i\,,\\ A_{ji}\,, & j<i\,,\end{cases} \tag{1.3}$$

$i=1,..,N;\quad j=1,...,N,$

где δ_{ij} – символ Кронекера, который определяется как

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & если\, i=j,\\ 0, & если\, i\ne j.\end{cases}$$

В рассматриваемой шестизвенной модели тяжелоатлета значения элементов матрицы определяются следующими формульными выражениями:

$$\begin{aligned}
&A_{11}=J_1+m_1S_1^2+L_1^2(m_2+m_3+m_4+m_5+m_6);\\
&A_{12}=m_2L_1S_2+L_1L_2(m_3+m_4+m_5+m_6);\\
&A_{13}=m_3L_1S_3+L_1L_3(m_4+m_5+m_6);\\
&A_{14}=m_4L_1S_4+L_1L_4(m_5+m_6);\\
&A_{15}=m_5L_1S_5+L_1L_5m_6;\\
&A_{16}=m_6L_1S_6;\\
&A_{22}=J_2+m_2S_2^2+L_2^2(m_3+m_4+m_5+m_6);\\
&A_{23}=m_3L_2S_3+L_2L_3(m_4+m_5+m_6);\\
&A_{24}=m_4L_2S_4+L_2L_4(m_5+m_6);
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$A_{25} = m_5 L_2 S_5 + L_2 L_5 m_6;$$
$$A_{26} = m_6 L_2 S_6 + L_2 L_6;$$
$$A_{33} = J_3 + m_3 S_3^2 + L_3^2 (m_4 + m_5 + m_6);$$
$$A_{34} = m_4 L_3 S_4 + L_3 L_4 (m_5 + m_6);$$
$$A_{35} = m_5 L_3 S_5 + L_3 L_5 m_6;$$
$$A_{36} = m_6 L_3 S_6;$$
$$A_{44} = J_4 + m_4 S_4^2 + L_4^2 (m_5 + m_6);$$
$$A_{45} = m_5 L_4 S_5 + L_4 L_5 m_6;$$
$$A_{46} = m_6 L_4 S_6;$$
$$A_{55} = J_5 + m_5 S_5^2 + L_5^2 m_6;$$
$$A_{56} = m_6 L_5 S_6;$$
$$A_{66} = m_6 L_6 S_6.$$

Представление коэффициентов A_{ij} в форме (1.3) делает быстрой и легкодоступной развернутую запись элементов матрицы A_{ij} с любыми значениями индексов и позволяет автоматизировать процесс их формирования на ЭВМ, задав исходные данные по массивам: *J, m, L, S*.

Подставим формулу (1.2) в (1.1), дифференцируя в (1.1) по времени обобщенные координаты и обобщенные скорости, получим формульное представление дифференциального оператора Лагранжа

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij}\ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) - \sum_{j=1}^{N} A_{ij}\dot{\varphi}_j^{\,2} \sin(\varphi_j - \varphi_i)\,. \tag{1.5}$$

Правую часть уравнения движения определим на основании векторного равенства

$$F_v = \sum_{v=1}^{N} F_v \frac{\partial r_v}{\partial \varphi_i}, \tag{1.6}$$

где F_v – N-мерный вектор внешних сил, приложенный к ЦМ звеньев биомеханической системы; r_v – радиус-вектор ЦМ звеньев.

В декартовой системе координат с учетом уравнения на движение (1.6) определим обобщенные силы F_v

$$F_v = \sum_{v=1}^{N} \left[X_v \frac{\partial x_v}{\partial \varphi_i} + Y_v \frac{\partial y_v}{\partial \varphi_i} + Z_v \frac{\partial z_v}{\partial \varphi_i} \right]. \tag{1.7}$$

Так как внешней силой, приложенной к ЦМ звеньев тела, является сила тяжести, а X_v и Y_v равны нулю, то имеем

$$F_v = \sum_{v=1}^{N} Z_v \frac{\partial z_v}{\partial \varphi_i} = -\left(\sum_{k=i+1}^{N} P_k L_i + P_i S_i \right) \cos \varphi_i . \qquad (1.8)$$

Введем обозначение

$$\Upsilon_i = \sum^{n} P_k L_i + P_i S_i. \qquad (1.9)$$

Содержательный смысл коэффициентов Y_i заключается в том, что они представляют собой выражения для определения обобщенных сил в уравнениях Лагранжа. Как следует из формульного выражения (1.9), они определяются только масс-инерционными характеристиками звеньев тела. В частности, для шестизвенной биомеханической модели они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&Y_1 = P_1 S_1 + L_1 (P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6);\\
&Y_2 = P_2 S_2 + L_2 (P_3 + P_4 + P_5 + P_6);\\
&Y_3 = P_3 S_3 + L_3 (P_4 + P_5 + P_6);\\
&Y_4 = P_4 S_4 + L_4 (P_5 + P_6);\\
&Y_5 = P_5 S_5 + L_5 P_6;\\
&Y_6 = P_6 S_6.
\end{aligned} \qquad (1.10)$$

Запишем формульное выражение (1.9) в виде

$$F_i = -\sum_{i=1}^{N} Y_i cos \varphi_i. \qquad (1.11)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения естественного движения N-звенной биомеханической модели в компактной записи имеют вид:

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} \ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) - \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \dot{\varphi}_j^{\,2} \sin(\varphi_j - \varphi_i) + Y_i \cos \varphi_i = 0,$$
$$i = 1,..., N. \qquad (1.12)$$

Из записи (1.12) видно, что количество уравнений, определяющих движение биомеханической системы, равно количеству ее степеней свободы или числу звеньев модели, а численное значение буквенного индекса i соответствует номеру уравнения в системе уравнений.

Так, формульные выражения уравнений естественного движения неразветвленной шестизвенной модели биомеханической системы, представленные в форме уравнений Лагранжа второго рода, имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&A_{11}\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_1)+A_{12}\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)+A_{13}\ddot{\varphi}_3\cos(\varphi_3-\varphi_1)+\\
&+A_{14}\ddot{\varphi}_4\cos(\varphi_4-\varphi_1)+A_{15}\ddot{\varphi}_5\cos(\varphi_5-\varphi_1)+A_{16}\ddot{\varphi}_6\cos(\varphi_6-\varphi_1)-\\
&-A_{11}\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1-\varphi_1)-A_{12}\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2-\varphi_1)-A_{13}\dot{\varphi}_3^2\sin(\varphi_3-\varphi_1)-\\
&-A_{14}\dot{\varphi}_4^2\sin(\varphi_4-\varphi_1)-A_{15}\dot{\varphi}_5^2\sin(\varphi_5-\varphi_1)-A_{16}\dot{\varphi}_6^2\sin(\varphi_6-\varphi_1)+\\
&+Y_1\cos\varphi_1=0,\\
&A_{21}\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_1)+A_{22}\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)+A_{23}\ddot{\varphi}_3\cos(\varphi_3-\varphi_1)+\\
&+A_{24}\ddot{\varphi}_4\cos(\varphi_4-\varphi_1)+A_{25}\ddot{\varphi}_5\cos(\varphi_5-\varphi_1)+A_{26}\ddot{\varphi}_6\cos(\varphi_6-\varphi_1)-\\
&-A_{21}\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1-\varphi_1)-A_{22}\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2-\varphi_1)-A_{23}\dot{\varphi}_3^2\sin(\varphi_3-\varphi_1)-\\
&-A_{24}\dot{\varphi}_4^2\sin(\varphi_4-\varphi_1)-A_{25}\dot{\varphi}_5^2\sin(\varphi_5-\varphi_1)-A_{26}\dot{\varphi}_6^2\sin(\varphi_6-\varphi_1)+\\
&+Y_2\cos\varphi_2=0,\\
&A_{31}\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_1)+A_{32}\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)+A_{33}\ddot{\varphi}_3\cos(\varphi_3-\varphi_1)+\\
&+A_{34}\ddot{\varphi}_4\cos(\varphi_4-\varphi_1)+A_{35}\ddot{\varphi}_5\cos(\varphi_5-\varphi_1)+A_{36}\ddot{\varphi}_6\cos(\varphi_6-\varphi_1)-\\
&-A_{31}\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1-\varphi_1)-A_{32}\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2-\varphi_1)-A_{33}\dot{\varphi}_3^2\sin(\varphi_3-\varphi_1)-\\
&-A_{34}\dot{\varphi}_4^2\sin(\varphi_4-\varphi_1)-A_{35}\dot{\varphi}_5^2\sin(\varphi_5-\varphi_1)-A_{36}\dot{\varphi}_6^2\sin(\varphi_6-\varphi_1)+\\
&+Y_3\cos\varphi_3=0,\\
&A_{41}\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_1)+A_{42}\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)+A_{43}\ddot{\varphi}_3\cos(\varphi_3-\varphi_1)+\\
&+A_{44}\ddot{\varphi}_4\cos(\varphi_4-\varphi_1)+A_{45}\ddot{\varphi}_5\cos(\varphi_5-\varphi_1)+A_{46}\ddot{\varphi}_6\cos(\varphi_6-\varphi_1)-\\
&-A_{41}\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1-\varphi_1)-A_{42}\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2-\varphi_1)-A_{43}\dot{\varphi}_3^2\sin(\varphi_3-\varphi_1)-\\
&-A_{44}\dot{\varphi}_4^2\sin(\varphi_4-\varphi_1)-A_{45}\dot{\varphi}_5^2\sin(\varphi_5-\varphi_1)-A_{46}\dot{\varphi}_6^2\sin(\varphi_6-\varphi_1)+\\
&+Y_4\cos\varphi_4=0,\\
&A_{51}\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_1)+A_{52}\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)+A_{53}\ddot{\varphi}_3\cos(\varphi_3-\varphi_1)+\\
&+A_{54}\ddot{\varphi}_4\cos(\varphi_4-\varphi_1)+A_{55}\ddot{\varphi}_5\cos(\varphi_5-\varphi_1)+A_{56}\ddot{\varphi}_6\cos(\varphi_6-\varphi_1)-\\
&-A_{51}\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1-\varphi_1)-A_{52}\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2-\varphi_1)-A_{53}\dot{\varphi}_3^2\sin(\varphi_3-\varphi_1)-\\
&-A_{54}\dot{\varphi}_4^2\sin(\varphi_4-\varphi_1)-A_{55}\dot{\varphi}_5^2\sin(\varphi_5-\varphi_1)-A_{56}\dot{\varphi}_6^2\sin(\varphi_6-\varphi_1)+\\
&+Y_5\cos\varphi_5=0,\\
&A_{61}\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_1)+A_{62}\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)+A_{63}\ddot{\varphi}_3\cos(\varphi_3-\varphi_1)+\\
&+A_{64}\ddot{\varphi}_4\cos(\varphi_4-\varphi_1)+A_{65}\ddot{\varphi}_5\cos(\varphi_5-\varphi_1)+A_{66}\ddot{\varphi}_6\cos(\varphi_6-\varphi_1)-\\
&-A_{61}\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1-\varphi_1)-A_{62}\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_2-\varphi_1)-A_{63}\dot{\varphi}_3^2\sin(\varphi_3-\varphi_1)-\\
&-A_{64}\dot{\varphi}_4^2\sin(\varphi_4-\varphi_1)-A_{65}\dot{\varphi}_5^2\sin(\varphi_5-\varphi_1)-A_{66}\dot{\varphi}_6^2\sin(\varphi_6-\varphi_1)+\\
&+Y_6\cos\varphi_6=0.
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

В уравнениях движения (1.13) коэффициенты A_{ij} характеризуют масс-инерционный и кинематический компоненты отдельных звеньев биомеханической системы: массы (m_i), моменты инерции (J_i), длины (L_i) и положение ЦМ звеньев (S_i) на продольной оси звена. Таким образом, в численных значениях динамических коэффициентов звеньев биомеханической системы (A_{ij}) учитываются антропометрические особенности сегментов и звеньев ОДА тела спортсменов.

Уравнения движения биомеханической системы, записанные в форме (1.12), остаются верны для модели с любым числом звеньев. Структура уравнений такова, что делает их удобным для автоматизированного формирования на ЭВМ. В самом деле, коэффициенты Y_i формируются по обозначению (1.9) в виде цикла по k от $k=i+1$ до N. Левая же часть i-го уравнения системы (1.12) формируется в виде цикла по j от $j=1$ до N. Количество циклов определяется числом звеньев модели. Коэффициенты A_{ij} также вычисляются в автоматизированном режиме расчетных операций [43; 51].

Таким образом, уравнения, описывающие движение биомеханической системы и представленные в виде (1.12), позволяют формировать уравнения движения с помощью ЭВМ для произвольного количества звеньев модели.

1.4 Моделирование целенаправленных движений человека

Уравнения движения биомеханической системы, записанные в форме (1.12), являются уравнениями естественного движения, т. е. такими, в которые в качестве неизвестных функций времени включены обобщенные координаты. При этом подразумевается, что движущийся объект не вырабатывает управляющих воздействий. Иначе говоря, естественное движение можно рассматривать как неуправляемое движение, не преследующее достижение цели [54; 55; 56].

Движения человека являются целенаправленными, и в этой своей части они существенным образом отличаются от естественных движений.

Целенаправленные движения формируются при помощи особых сил, называемых управляемыми. С этой точки зрения, человек – самоуправляемая система, которая использует для управления движением вырабатываемые внутри системы мышечные силы.

В математической форме учет управляющих воздействий мышечных сил на биомеханику движения заключается во введении в правую часть уравнений естественного движения управляющих моментов мышечных сил в суставах (M_i), записываемых для i-го уравнения системы (1.12) в виде алгебраической суммы слагаемых $M_i - M_{i+1}$, где

$$\mathrm{M}_{i+1} \neq 0, \quad \text{если } i<N \quad \text{и} \quad \mathrm{M}_{i+1} = 0, \quad \text{если } i = N. \tag{1.14}$$

Включая алгебраическую сумму слагаемых (1.15) в правую часть уравнений (1.13), запишем уравнения целенаправленного движения N-звенной биомеханической системы в компактной форме

$$\sum_{i=1}^{..} A_{ij}\ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) - \sum_{i=1}^{..} A_{ij}\dot{\varphi}_j^{\,2} \sin(\varphi_j - \varphi_i) + Y_i \cos\varphi_i = M_i - M_{i+1}. \tag{1.15}$$

Решить систему уравнений (1.13), (1.15) можно относительно как ее правой, так и левой частей. В первом случае необходимы данные о траекторных положениях звеньев тела спортсмена в процессе выполнения спортивных упражнений. Их можно получить по материалам оптической регистрации движений [23; 36; 35; 37]. Тогда, используя в качестве расчетной модели уравнения (1.15), определим величину управляющих моментов мышечных сил в суставах спортсмена, формирующих данное движение.

Как уже отмечалось, решить систему уравнений, описывающих целенаправленные движения человека, можно и относительно ее левой части. В частности, за исходные данные в этом случае можно принять обобщенные координаты и обобщенные скорости звеньев тела в начальный момент времени и представить в аналитическом виде или в форме заданной числовой последовательности закон изменения управляющих моментов мышечных сил по времени на всей траектории системы. Решение исходной системы уравнений с последующим интегрированием позволит получить на выходе траекторию движения моделируемой биомеханической системы. Варьируя начальные условия движения и программный закон изменения управляющих моментов мышечных сил, получим различные варианты техники двигательных действий.

Следовательно, уравнения (1.15) представляют собой базовую математическую модель движения рассматриваемой *N*-звенной биомеханической системы, и она может быть использована как для анализа, так и для синтеза техники спортивных упражнений.

Определим построенную в форме системы дифференциальных уравнений (1.15) математическую модель движений человека в качестве *базовой математической модели движения биомеханической системы*. Анализ структуры уравнений базовой математической модели показывает, что разрешить исходную систему уравнений можно относительно как ее левой, так и правой частей. Это позволяет ставить и решать два класса задач биомеханики движений спортсмена.

Первая задача биомеханики (в классической механике она называется прямой) заключается в численном определении внешних и внутренних сил, действующих на тело спортсмена в процессе выполнения упражнений, в частности, и в определении количественных значений правой части уравнений (1.15) на всей траектории движения. Практически данная задача биомеханики сводится к вычислительным процедурам численного определения управляющих моментов мышечных сил в суставах спортсмена, реализующих траекторию реального движения. Решение этой задачи основано на применении в расчетных операциях базовой математической модели движения биомеханической системы, в которой в качестве исходных данных используются сведения о траекторных положениях звеньев тела исполнителей. Эту информацию можно получить по материалам оптической регистрации движений, например, после обработки материалов видеосъемки исследуемой группы упражнений. После считывания обобщенных координат объекта и их численного дифференцирования по времени находится левая часть уравнений (1.15), а следовательно, и численные значения управляющих моментов мышечных сил в суставах спортсмена в дискретные моменты времени. Дискретизация модели выполняется в соответствии с шагом оптической регистрации движений по времени.

Вторая задача противоположна первой и называется в механике обратной. Если при решении прямой задачи известными функциями являются обобщенные координаты биомеханической системы (известна траектория звеньев тела спортсмена), то при решении обратной задачи эту траекторию необходимо определить. Известными функциями в этом случае выступают:

- *начальные условия движения* биосистемы (обобщенные координаты и обобщенные скорости в начальный момент времени);
- *масс-инерционные характеристики* звеньев модели;
- *управляющие функции*, заданные на всей траектории системы.

Решение системы уравнений (1.15) и их численное интегрирование позволяют получить на каждом шаге интегрирования в качестве выходных данных численные значения обобщенных координат, обобщенных скоростей и обобщенных ускорений, а в конечном итоге – траекторию моделируемого двигательного действия.

1.5 Анализ и синтез как методы биомеханики

Биомеханика, как и любая другая наука, определяется своим предметом и методом. Проблема изучения моторного компонента двигательной деятельности человека до сих пор окончательно не решена, многие вопросы как теоретического плана, так и прикладной направленности еще ждут своего решения. Качественный скачок в накоплении новых знаний в этой области будет зависеть, прежде всего, от развития методов биомеханики.

Традиционно в биомеханике выделяют два метода – анализ и синтез.

Анализ – метод научного познания, в основу которого входит процедура мысленного или реального расчленения предмета на составляющие его части. Цель расчленения – переход от изучения целого к изучению его частей и осуществление путем абстрагирования от связи частей друг с другом.

Анализ – органичная составная часть всякого научного исследования, являющаяся обычно его первой стадией, когда исследователь переходит от нерасчлененного описания изучаемого объекта к выявлению его строения, состава, а также его свойств и признаков [10].

В.Б. Коренберг [53] выделяет три основные формы биомеханического анализа:

1. Количественный биомеханический анализ:

а) точный – с использованием точных данных различных приборов измерения;

б) приближенный – с упрощенной обработкой и использованием сравнительно грубых данных различных приборных измерений с учетом наиболее весомых факторов.

2. Качественный биомеханический анализ:

а) углубленный – с тщательным исследованием материалов приборных измерений с привлечением логических построений, включающих данные смежных наук;

б) основной – то же, что и при углубленном анализе, но без данных приборных измерений;

в) упрощенный – с использованием грубых оценок с учетом лишь решающих факторов.

3. Педагогический анализ – без существенного применения биомеханики.

В результате автор делает вывод о том, что точный количественный биомеханический анализ выполнения упражнения представляет собой мощный, но сложный, громоздкий инструмент специальных исследований. Применение его в учебно-тренировочном процессе целесообразно лишь в отдельных случаях. В целом соглашаясь с автором, отметим, что на современном этапе развития вычислительной техники и средств измерений появилась возможность более широко использовать количественный биомеханический анализ.

Согласно концепции А.Н. Лапутина [61], схема биомеханического анализа физического упражнения должна состоять из следующих этапов:

1. Установить точное название упражнения, соответствующее принятой спортивно-педагогической и функционально-анатомической терминологии.

2. Определить конкретную цель (или цели) биомеханического анализа.

3. Подобрать методы исследования для решения отдельных задач работы.

4. Определить основные доступные в биомеханическом исследовании анатомо-физиологические системы организма спортсмена в двигательном аппарате.

5. Определить механические характеристики движения.

6. Проанализировать внутреннюю связь между однотипными характеристиками движений, а так же связь между анатомо-физиологическими, с одной стороны, и механико-математическими характеристиками, с другой, при помощи методов математической статистики. На основании анализа сделать соответствующие выводы по оценке упражнения.

Д.Д. Донской и В.М. Зациорский предлагают при изучении движения учитывать неразрывные задачи биомеханики (общую и частные) [32]. Под общей задачей авторы понимают оценку эффективности приложения сил для более совершенного достижения поставленной цели движения. Частные задачи биомеханики спорта состоят в изучении следующих основных вопросов: а) строение, свойства и двигательные функции тела спортсмена; б) рациональная спортивная техника; в) техническое совершенствование спортсмена.

Согласно В.Л. Уткину [94], процедура анализа двигательной деятельности (биомеханического анализа) состоит из следующих этапов:

а) изучение внешней картины двигательной деятельности;

б) выяснение причин, вызывающих и изменяющих движения;

в) определение топографии работающих мышц;

г) определение энергетических затрат и того, на сколько целесообразно расходуется энергия работающих мышц;

д) выявление оптимальных двигательных режимов (наилучшей техники двигательных действий и наилучшей тактики двигательной деятельности) осуществляется на заключительном этапе биомеханического анализа.

Обобщая вышерассмотренные подходы к определению биомеханического анализа, выделим следующие этапы при его проведении [41; 42]:

1. *Определение характеристик*. По биомеханическим характеристикам движений судят об их выполнении. Эти характеристики регистрируют, данные регистрации обрабатывают, сопоставляют, анализируют.

2. *Установление двигательного состава*. Основываясь на проанализированные биомеханические характеристики, определяют *элементы* движений:

- *Главные и корректирующие управляющие движения* (суставные движения звеньев и систем звеньев);
- *Динамическая осанка* – движение с сохранением позы спортсмена;
- *Фазы движений* (временная форма организации элементов двигательного действия).

Устанавливают из каких положений и в каких суставах выполняется движение, в каких направлениях и с какой амплитудой, какова последовательность и согласованность сгибательно-разгибательных движений спортсмена в суставах в пространстве и во времени. Иначе говоря, определяют внешнюю картину движения в целом.

Параллельно вычленяют и составные части движений звеньев:

- *Подготовительная фаза;*
- *Рабочая фаза;*
- *Заключительная фаза.*

3. *Анализ структуры движений*. Установив состав движений, основное внимание переключают на установление *структуры* движений (способ взаимодействия элементов и подсистем системы):

- *Кинематическая структура* (пространственная, временная, пространственно-временная, ритмическая, фазовая, координационная);
- *Динамическая структура* (силовая, энергетическая, инерционная);
- *Вещественная структура* (анатомическая – ОДА тела человека);
- *Управляющая структура* (информационная, сенсорная, психологическая, эффекторная).

4. *Оценка эффективности движений.* Устанавливают, насколько успешно решена двигательная задача, насколько рационально достигнута цель движения.

В настоящее время запросы практики спортивной деятельности требуют принципиально иного подхода в области теории построения движений. Не достаточно ограничиваться анализом уже известных форм движения, а необходимо разрабатывать технику упражнений с заранее заданными качествами и свойствами. На решение поставленной задачи выходит синтез техники спортивных упражнений.

Синтез – это метод научного познания, в основу которого входит процедура соединения различных элементов предмета в единое целое, систему, без чего невозможно действительно научное познание этого предмета. Синтез выступает не как метод конструирования целого, а как метод представления целого в форме единства знаний, полученных с помощью анализа. В синтезе происходит не просто объединение, а обобщение аналитически выделенных и изученных особенностей объекта. Положения, получаемые в результате синтеза, включаются в теорию объекта, которая, обогащаясь и уточняясь, определяет пути нового научного поиска [42; 44].

Технологию использования математических моделей движений спортсменов с целью совершенствования технических действий спортсменов можно представить следующей методологической цепочкой [22; 77]:

1) Построение математической модели. Имитационное моделирование является наиболее эффективным, а зачастую и единственным методом исследования сложных систем, к которым относятся и биомеханические системы. Задача исследователя – определить степень упрощения реальной моделируемой системы, иначе говоря, уровень абстракции. Если рассматривать тело человека только как механическую систему, то уже на данном уровне абстракции необходимо ответить на вопросы о числе звеньев модели, ее разветвленности, т. е. плоскостная это или пространственная модель. На текущем этапе исследований представляется проблематичным создание универсальной математической модели синтеза произвольных пространственных движений спортсмена, которая могла бы описать весь класс спортивных движений. Однако модели, позволяющие описать определенные подклассы движений, уже разработаны.

В зависимости от способа задания управляющих функций и моделирующего их алгоритма управления движением, математическая модель движения биомеханической системы трансформируется в подкласс конструктивных математических моделей синтеза целенаправленных движений человека.

Управляющие воздействия биомеханической системы формируются на двух уровнях: 1) кинематический уровень формирования программного управления, если управляющие функции заданы в форме кинематических характеристик; 2) динамический уровень формирования программного управления при задании управляющих функций в форме управляющих моментов мышечных сил.

Соответственно это определяет два класса конструктивных математических моделей. Выделяя в качестве кинематического управления суставные углы спортсмена на всей траектории движения, уравнения трансформируются в следующую математическую модель:

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{M_1 - \sum_{i=1}^{N}\left[Y_i \cos\varphi_i + \sum_{j=2}^{N} A_{ij}\ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) - \sum_{k=1}^{N} A_{i,k}\dot{\varphi}_k{}^2 \sin(\varphi_k - \varphi_i)\right]}{\sum_{i=1}^{N} A_{i,1}\cos(\varphi_1 - \varphi_i)},$$
$$\ddot{\varphi}_i = \ddot{\varphi}_1 + \sum_{z=1}^{p-1} \ddot{u}_z, \qquad (1.16)$$

где i=2, 3, … , N; $u_i = \varphi_{i+1}$-φ_i – суставные углы исполнителя.

Второй класс уравнений получим, если в качестве управления принимаются значения моментов мышечных сил на всей траектории движения.

Записав уравнения (1.15) в нормальном виде и приняв обозначения

$$\grave{A} = \left\| A_{ij} \cos(\varphi_j - \varphi_i) \right\|, \; f = \left\| \sum_{j=1}^{N} A_{ij}\, \dot{\varphi}_j^2 \sin(\varphi_j - \varphi_i) - Y_i \cos\varphi_i + M_i - M_{i+1} \right\|,$$

получим следующую математическую модель

$$\ddot{\varphi} = A^{-1} f, \qquad (1.17)$$

где A^{-1} – обратная матрица по отношению к исходной матрице A.

2) Организация вычислительного эксперимента – выбор адекватных численных алгоритмов решения уравнений. Математическая модель позволяет определить положение спортсмена в любой момент времени. Для этого необходимо решить систему дифференциальных уравнений. Аналитическое решение данной системы не всегда возможно, поэтому необходимо воспользоваться численными методами решения дифференциальных уравнений. На данном этапе исследования необходимо определиться с методами решения, потому что от их корректности зависит и точность решения уравнения, и адекватность результатов моделирования реальным движениям. На современном этапе развития вычислительных алгоритмов наиболее часто используется метод интегрирования Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

3) Создание компьютерной программы. Конечно, для вычисления биомеханических характеристик движений с использованием разработанных математических моделей возможно использование специализированных математических пакетов. Однако данный способ, на наш взгляд, неприемлем с точки зрения эффективности использования имитационного моделирования. Возможно использование таких программ широким кругом пользователей, в том числе тренерами, спортсменами, студентами, которые в случае создания конечного программного продукта позволят в удобной форме задать начальные условия моделирования и предоставить развитые средства анализа расчетных биомеханических характеристик. В этом случае моделировать спортивные движения сможет лишь специалист, обладающий серьезной математической подготовкой, которые.

4) Собственно вычислительный эксперимент на ЭВМ. Можно выделить две фазы вычислительных экспериментов. Первая фаза – предварительный вычислительный эксперимент, направлен на решение задачи проверки адекватности и корректности созданных моделей и программ. Созданные математические модели и компьютерные программы должны быть проверены на адекватность реальным спортивным движениям. После создания программы для разных исполнителей следует построить траектории с данными регистрации движений и сравнить их результаты с результатами имитационного моделирования. После данной процедуры возможно применение разработанных моделей и программ для дальнейших исследований.

Кроме того, формализация движений спортсмена посредством математической модели позволяет использовать методы теории оптимизации для поиска оптимального управления. В зависимости от способа задания управляющих функций (кинематического либо динамического) возможно применение оптимизационных процедур как через поиск оптимальных моментов мышечных сил спортсмена, так и в пространстве кинематического управления, например, по суставным углам спортсмена.